Rozwiązywanie równań różniczkowych

opracował dr inż. Robert JAKUBOWSKI, Politechnika Rzeszowska, KSiSL

Rozwiązywanie równań różniczkowych z wykorzystaniem metod numerycznych

W poprzednim wykładzie zaprezentowane zostało podejście do rozwiązywania równań różniczkowych z wykorzystaniem Symbolic toolbox. Tym razem zaprezentuję podejście do rozwiąywania równań różniczkowych z wykorzystaniem funkcji ***ode - ordinary differential equations.***

Jednym z narzedzi do rozwiązywania rónań i układów równań różniczkowych jest funkcja ***ode45***. Zagadnienia związane z rozwiąywaniem równań różniczkowych w technice najczęściej stosowane są do zgadnień w dziedzinie czasu - związane z ruchem w czasie. Funkcję ***ode45*** można użyć w następujący sposób:

```
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,y0)
```

gdzie:

t - wektor czasu

y - wektor rozwiąznia funkcji dla określonego czasu t

odefun - nazwa funkcji zawierającej równanie różniczkowe

tspan - przedział czasu

y0 - wartość y dla początkowej chwili czasu t0

Przedsyawmy to na przykładzie. Poszukać rozwiązania równania różniczkowego opisanego równaniem:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \sin(t)$$

w przedziale czasu tspan=[0 , 4pi), gdy dla poczatkowej chwili czasu t0 y0=0.

W celu rozwiązania równania przgotowuje się funkcje zmiennej y i t. Taką funkcję przedsyawiono poniżej w funkcjech pomocniczych pod nazą ***odefun1***.

Zdefinujmy zatem przedział czasu tspan oraz wartość y0 dla poczatkowej chwili czasu t0

```
tspan=[0 4*pi]
```

```
tspan = 1×2
         0   12.5664
```

```
y0=-1;
```

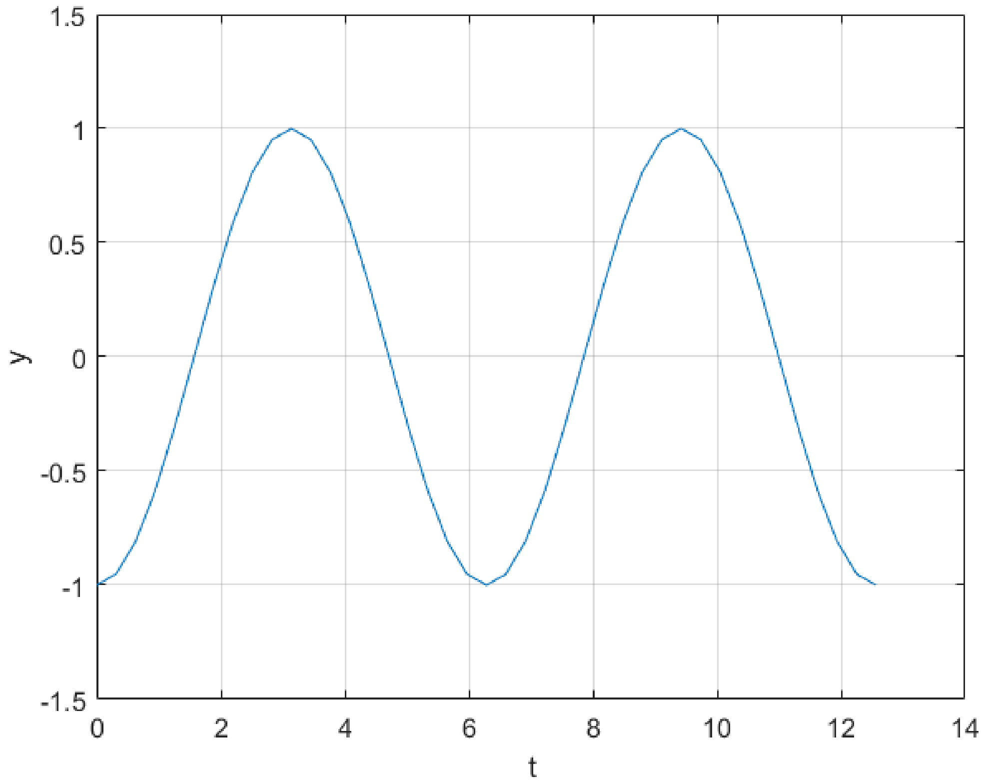
Wywołajmy funkcję ode45 otrzymujemy rozwiązanie, czyli przebieg zmiennej y w czasie t:

```
[t,y] = ode45(@odefun1,tspan,y0);
```

Narysujmy tą funkcję na wykresie

```
plot(t,y)
```

```
xlabel('t');
ylabel('y')
grid on
```



Tym razem rozwiążmy zadanie, gdy równanie różniczkowe wygląda następująco

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = y\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

gdzie k=100

Przedstawmy rozwiązanie równania w przedziale czasu tspan=[0,10]s, gdy dla poczatkowej chwili czasu t0 y0=1.

W celu rozwiązania równania przgotowuje się funkcje zmiennej y i t. Taką funkcję przedsyawiono poniżej w funkcjech pomocniczych pod nazą ***odefun2***.

Zdefinujmy zatem przedział czasu tspan oraz wartość y0 dla poczatkowej chwili czasu t0

```
tspan=[0 10]
```

```
tspan = 1×2
     0    10
```

```
y0=1;
```

Wywołajmy funkcję ***ode45***:

```
[t,y] = ode45(@odefun2,tspan,y0);
```

Wynik przedstawmy na wykresie

```
plot(t,y)
xlabel('t')
ylabel('y')
grid on
```

W rozwiązaniu otrzymaliśmy wektor czasu i odpowiadające wartości y. W ten sposób gdy chcemy znaleźć wartość y dla konkretnej chwili czasy t, możemy mieć problem. Dane są wartości y dla określonych wartości czasu t. Na przykład w tym przypadku dostaliśmy wektor czasu t o n elementach:

```
n=length(t)
```

```
n = 45
```

```
disp(t')
```

```
  Columns 1 through 10

         0    0.0507    0.1015    0.1522    0.2030    0.4277    0.6524    0.8771    1.1018    1.3518

  Columns 11 through 20

    1.6018    1.8518    2.1018    2.3518    2.6018    2.8518    3.1018    3.3518    3.6018    3.8518

  Columns 21 through 30

    4.1018    4.3518    4.6018    4.8518    5.1018    5.3518    5.6018    5.8518    6.1018    6.3518

  Columns 31 through 40

    6.6018    6.8518    7.1018    7.3518    7.6018    7.8518    8.1018    8.3518    8.6018    8.8518

  Columns 41 through 45

    9.1018    9.3263    9.5509    9.7754   10.0000
```

Gdy interesuje nas wynik dla prezentowanej chwili czasu t np. dla t(25), to możemy otrzymać wartość y w sposób następujący

```
t(25)
```

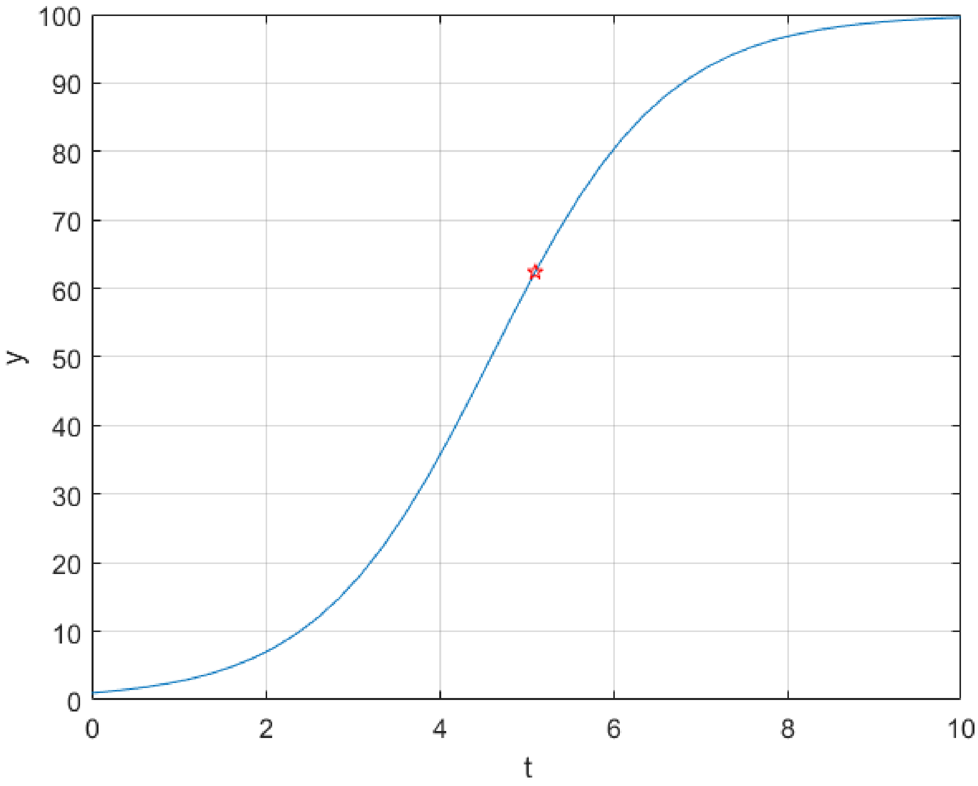
```
ans = 5.1018
```

```
y(25)
```

```
ans = 62.4097
```

Przedstawmy otrzymany punkt na wykresie

```
hold on
plot(t(25),y(25),'pr')
hold off
```



Problem pojawia się, gdy chcemy otrzymać rozwiązanie dla chwili czasu t, która nie jest zawarta w wektorze t. W takim przypadku, możemy wywołać funkcję ***ode45*** nieco inaczej, przypisując jej tylko jedną wartość wyjściową:

```
rozw = ode45(@odefun2,tspan,y0)
```

```
rozw = struct with fields:
     solver: 'ode45'
    extdata: [1×1 struct]
          x: [0 0.2030 1.1018 2.1018 3.1018 4.1018 5.1018 6.1018 7.1018 8.1018 9.1018 10]
          y: [1 1.2223 2.9503 7.6333 18.3451 37.9180 62.4097 81.8613 92.4643 97.0894 98.9086 99.5524]
      stats: [1×1 struct]
      idata: [1×1 struct]
```

W tym przypadku zmienna ***rozw*** jest strukturą zawierającą rozwiązanie, które potem w sposób łatwy z użyciem funkcji ***deval*** można przeliczyć dla dowolnej chwili czasu t, dla której wcześniej wyznaczyliśmy rozwiązanie. Naprzykład teraz wyznaczmy rozwiązanie dla t=2 i przedstawimy rozwiązanie na wykresie

```
% Wyznaczanie wartości y od t=2 dla wcześniej wyznaczonego rozwiązania jako
% struktura rozw
y2=deval(rozw,2)
```

```
y2 = 6.9459
```

```
% Powtórzenie wykresu na podstawie wcześniej wyznaczonych punktów
plot(t,y)
hold on
xlabel('t')
ylabel('y')
```

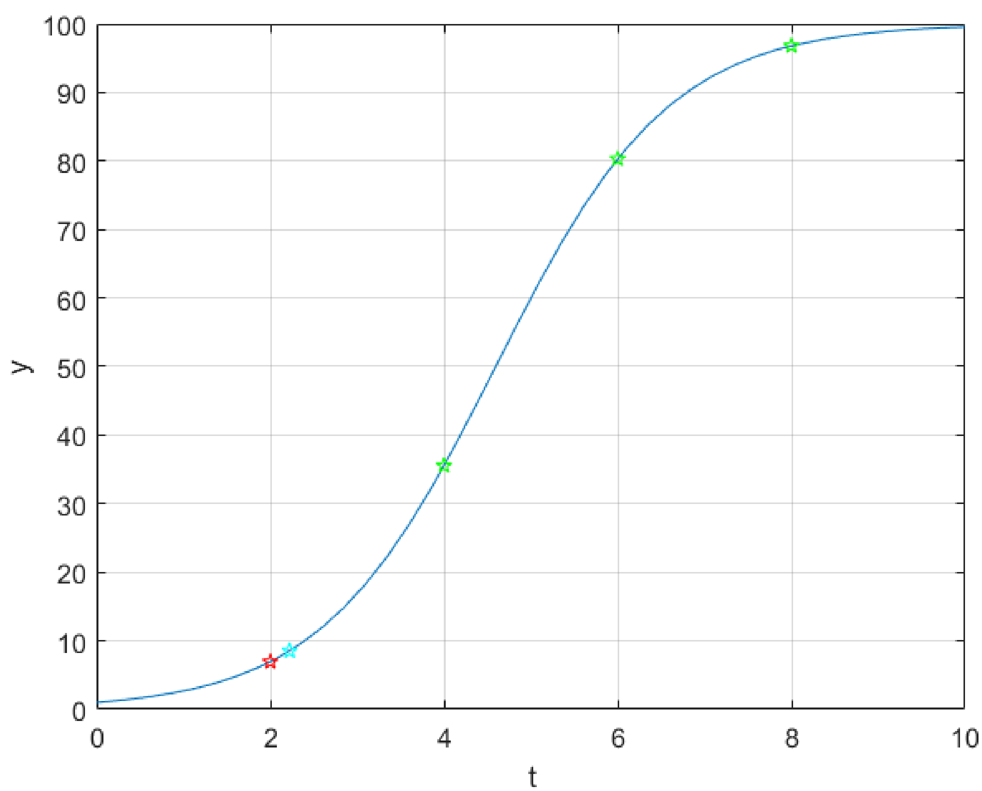
```
plot(2,y2,'pr')
% Wyznaczenie wartości y od t=2.2222
y2_222=deval(yodt,2.222)
```

```
y2_222 = 8.5248
```

```
plot(2.222,y2_222,'pc')
% Wyznaczenie wartości y dla trzech wartośći chwili czasu t
y4_8=deval(yodt,[4,6,8])
```

```
y4_8 = 1×3
   35.5529   80.3008   96.7881
```

```
plot([4,6,8],y4_8,'gp')
grid on
hold off
```



Zadanie do wykonania w ramach ćwiczeń

Wyznaczyć wartość rozwiązania równania w przedziale czasu t=0:2pi

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2\sin(x) - \cos(t^2)$$

początkową wartość rozwiązania w chwili czasu t=0 przyjąć x0=1

Przedstawić rozwiązanie graficznie linią niebieską ciągłą

Następnie zmienić wartość poczatkową x0=0, dla chwili t0, rozwiązanie przedstawić na tym samym wykresie linią przerywaną w kolorze czerwony,

Uwaga : Funkcjach na dole w **Funkcje pomocnicze** należy przygotować stosowną funkcję zawirającą równanie

Funkcje pomocnicze

Funkcja, przygotowana do rozwiązania równania różniczkowego za pomocą funkcji ***ode45***, zawierająca równanie

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \sin(t)$$

Funkcja **odefun1** (nazwa może być dowolna). Po nzawie funkcji zmienne niezależna t i zmiennea zależna y, która w tym wypadku nie występuje w równaniu

```
function dydt = odefun1(t,y)

dydt = sin(t);
end
```

Funkcja **odefun2** przygotowana do rozwiązania równania różniczkowego za pomocą funkcji ***ode45***, zawierająca równanie

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = y\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

Funkcja odefun2. Po nzawie funkcji zmienne niezależna t i zmiennea zależna y

```
function dydt = odefun2(t,y)
K = 100;
dydt = y*(1 - y/K);
end
```

Funkcja, przygotowana do rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2\sin(x) - \cos(t^2)$$