Obliczenia z wykorzystaniem symbolic toolbox w Matlabie

przygotował dr inż Robert JAKUBOWSKI, Politechnika Rzeszowska, KSiSL

Table of Contents

Zmienne symboliczne, wyrażenia symboliczne, równania i funkcje

Zmienne symboliczne deklaruje się poprzez funkcję ***syms.*** Poniżej zdeklarowane zostanie x, y i z jako zmienene symboliczne

```
syms x y z
```

Wyrażenia symboliczne tworzymy z wykorzystaniem zmiennych symbolicznych np:

```
f1=x^2+2*y^3
```

f1 = $x^2 + 2\, y^3$

```
f2=-x+y^2+z^2
```

f2 = $y^2 + z^2 - x$

W wyrażeniach symbolicznych można dokonać podstawień jednych zmiennych za drugie, lub też można podstawiać liczby za zmienne. Do postawień wykorzystuje się funkcję ***subs***

```
f11=subs(f1,x,2)
```

f11 = $2\, y^3 + 4$

```
f21=subs(f2,[x y],[1 3])
```

f21 = $z^2 + 8$

```
f13=subs(f1,[x y],[1 3])
```

f13 = 55

Nieco inny efekt uzyskamy podstawiając w miejsce pojedynczej zmiennej kilka elementów

```
f11_1=subs(f1,x,[1; 2; 3])
```

f11_1 =

$$\begin{pmatrix} 2\, y^3 + 1 \\ 2\, y^3 + 4 \\ 2\, y^3 + 9 \end{pmatrix}$$

Proszę sprawdzić jaka będzie różnica gdy w miejsce x podstawi się wektor będący werszem

W przypadku gdy w miejsce x i y chcemy podstawić wektor, to pojawia się problem. Jedyną możliwą opcją jest najpierw podstawimy wektor za jedną zmiennną, a następnie za drugą, tyle że wtedy dostaniemy zwiększoną liczbę wyników. Za x już podstawiliśmy teraz podstawmy za y i zobaczmy wynik. Jest on podstawieniem y do kazdgo z wcześniej uzyskanych wyrażeń z podstawienia x.

```
b=[5; 5; 3];
f11_2=subs(f11_1,y,b)
```

f11_2 =

$$\begin{pmatrix} 251 \\ 251 \\ 55 \\ 254 \\ 254 \\ 58 \\ 259 \\ 259 \\ 63 \end{pmatrix}$$

Równania możemy tworzyć pisząc zależnoćś od podstaw, lub wykorzystując wcześniej przygotowane wyrażenia symboliczne. Do zapisania równości prawej i lewej strony wykorzystuje się podwójny znak ==

```
r1=x^2-2*y==-2
```

r1 = $x^2 - 2\,y = -2$

```
r2=f1==-3*x
```

r2 = $x^2 + 2\,y^3 = -3\,x$

```
r3=f1==f2
```

r3 = $x^2 + 2\,y^3 = y^2 + z^2 - x$

Funkcje okresla się jako wyrażenia zależne od innych zmiennych. Struktura funkcji fun(zm)=wyrażenie. Np funkcja zmiennej x

```
fun1(x)=2*x^3-5
```

fun1(x) = $2\,x^3 - 5$

```
fun2(x)=f1
```

fun2(x) = $x^2 + 2\,y^3$

Pierwsza i druga funkcja jest funkcją zmiennej x. Druga funkcja zawiera dodatkowo wyrażenie zmienną symboliczną y.

Można też tworzyć funkcję wielu zmiennych, np z funkcji fun2 możemy zrobić funkcje fun3 zmiennej x i y

```
fun3(x,y)=fun2
```

fun3(x, y) = $x^2 + 2\,y^3$

Obliczenia funkcji prowadzi się poprzez podstawienie wartości w miejsce zmiennej. np

```
f1_2=fun1(2)
```

f1_2 = 11

```
f2_2=fun2(2)
```

f2_2 = $2\,y^3 + 4$

```
f3_23=fun3(2,3)
```

f3_23 = 58

W przypadku fun1 i fun3 wynik końcowy jest liczbą, w przypadku fun2 otrzymaliśmy wyrażenie, które można obliczyć podstawiając z wykorzystaniem funkcji ***subs***

```
f2_2=subs(f2_2,y,3)
```

f2_2 = 58

Do funkcji też można podstawić kilka zmiennych i wyznaczać dla nich wyniki. Np wyliczmy wartość fun3 dla x=1; 2; 4; i odpowiadających temu wartości y= 1; 1; 3

```
a=[1; 2 ;4];
b=[1; 1; 3];
f3_wekt=fun3(a,b)
```

f3_wekt =

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Otrzymane wyniki chociaż reprezentują liczby, to nie są liczbami. Można to sprawdzić funkcją ***whus***

```
whos f3_wekt
```

```
  Name         Size            Bytes  Class    Attributes

  f3_wekt      3x1                 8  sym
```

```
whos a
```

```
  Name      Size            Bytes  Class     Attributes

  a         3x1                24  double
```

W uzyskanej informacj opcaj Class informuje nas, że zmienna f3_wekt jest zmienną symboliczną, a zmienna a jest zmienną numeryczną typu double

Operacje upraszczające wyrażenia symboliczne

Poprzez funkcje wewnętrzne Matlaba można wykonać operacje upraszczajace wyrażenia symboliczne.

```
syms x
W1 = x*(x+2)^2 - 4*x
```

W1 = $x\,(x+2)^2 - 4\,x$

Do rozwijania wyrażeń służy funkcja ***expand***

```
W1_e=expand(W1)
```

W1_e = $x^3 + 4\,x^2$

Do uproszczenia wyrażenia służy funkcja ***simplify***

```
W1_s=simplify(W1)
```

W1_s = $x^2\,(x+4)$

Do poszukiwania mnożników w wyrażeniu służy funkcja ***factor***

```
W1_f=factor(W1)
```

W1_f = $(x \quad x \quad x+4)$

Otrzymaliśmy trzy elementy, które pomnożone przez siebi dają analizowane wyrażenie.

Rozwiązywanie równań i układów równań na wyrażeniach symbolicznych

Rozwiązywanie równań i układów równań wykonuje się za pomocą funkcji ***solve.*** Przygotujmy równanie r1 zmiennej x i je rozwiążmy

```
clear variables
syms x y
r1=8*x^4-2*x==0
```

r1 = $8\,x^4 - 2\,x = 0$

```
ob_r1=solve(r1)
```

ob_r1 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4^{2/3}}{4} \\ \frac{4^{2/3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)}{4} \\ -\frac{4^{2/3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)}{4} \end{pmatrix}$$

Otrzymaliśmy liczby w postaci wyrażeń symbolicznych, które podobnie jak poprzednio poprzez funkcję eval czy double można zamienić na wartości

```
ob_r1_val=eval(ob_r1)
```

```
ob_r1_val = 4×1 complex
   0.0000 + 0.0000i
   0.6300 + 0.0000i
  -0.3150 + 0.5456i
  -0.3150 - 0.5456i
```

Uzyskane wyniki są wartościami zespolonymi oraz liczbami rzeczywistymi. Aby ograniczyć rozwiązanie do liczn rzeczywistych możemy nałożyć ograniczenia na zmienną x poprzez funkcję ***assume***. Naprzykład ograniczmy ją do liczb rzeczywistych i rozwiązmy równanie

```
assume(x,'real')
ob_r1=solve(r1)
```

```
ob_r1 =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4^{2/3}}{4} \end{pmatrix}$$

Obecnie otrzymaliśmy jako wynik dwie wartości zamiast czterech. Gdy jescze założymy dodatkowo, że x>0 to powinniśmy dostać jedno rozwiązanie

```
assumeAlso(x>0)
ob_r1=solve(r1)
```

```
ob_r1 =
```

$$\frac{4^{2/3}}{4}$$

Do wycofania ograniczeń położonych na zmienną służy komenda ***assume*** z parametrem *clear*

```
assume(x,'clear')
```

Podobny efekt narzucenia zmiennej symbolicznej określonego ograniczenia można uzyskać bezpośrednio przy dklaracji zmiennej np.

```
syms x real
```

Sparwdzenie nałożonych ograniczeń na zmienną jest dostępne funkcją ***assumptions***

```
assumptions(x)
```

ans = $x \in \mathbb{R}$

```
assumeAlso(x>y)
assumptions(x)
```

ans = $(x \in \mathbb{R} \quad y < x)$

W przypadku, gdy rozwiązujemy równanie z kilkoma zmiennymi, jeden z nich będzie traktowany jako poszukiwana niewiadoma, a pozostałe jako parametry. Dlatego gdy weżmiemy równanie r2 o zmiennych x lub y, to możemy go rozwiązać

```
assume(x,'clear')
r2=x^2-y^3==3
```

r2 = $x^2 - y^3 = 3$

```
ob_r2_x=solve(r2,x)
```

ob_r2_x =

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y^3+3} \\ -\sqrt{y^3+3} \end{pmatrix}$$

```
ob_r2_y=solve(r2,y)
```

ob_r2_y =

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)\,(x^2-3)^{1/3} \\ (x^2-3)^{1/3} \\ -\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)\,(x^2-3)^{1/3} \end{pmatrix}$$

Aby uzyskać w tym wypadku określoną wartość trzeba za występującą zmienną podstawić określoną wartość na z wykorzystaniem funkcji subs i double jak przedstawiono poniżej

```
ob_r2_y_val=double(subs(ob_r2_y,x,1))
```

```
ob_r2_y_val = 3×1 complex
  -1.2599 - 0.0000i
   0.6300 + 1.0911i
   0.6300 - 1.0911i
```

Rozwiązywanie układów równań realizuje się w podobny sposób. Wykorzystamy równania r1 i r2 zmiennych x i y do znalezienia wartości x i y spełniających te równania

```
r1=x-2*y+3==0
```

r1 = $x - 2\,y + 3 = 0$

```
r2=x^2+y^2==25
```

r2 = $x^2 + y^2 = 25$

```
[x_ob,y_ob]=solve([r1,r2],[x,y])
```

x_ob =

$$\begin{pmatrix} -\frac{4\,\sqrt{29}}{5} - \frac{3}{5} \\ \frac{4\,\sqrt{29}}{5} - \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

y_ob =

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{5} - \frac{2\,\sqrt{29}}{5} \\ \frac{2\,\sqrt{29}}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Zamieńmy wynikowe wielkości symboliczne na wartości liczbowe

```
x_ob_val=double(x_ob)
```

```
x_ob_val = 2×1
   -4.9081
    3.7081
```

```
y_ob_val=double(y_ob)
```

```
y_ob_val = 2×1
   -0.9541
    3.3541
```

Gdy na rozwiązywany układ narzucimy ograniczenie, że interesuje nas rozwiązanie dla x i y większych od 0 to otrzymamy

```
assume([x y], 'positive')
[x_ob,y_ob]=solve([r1,r2],[x,y]);
[x_y_ob_val]=double([x_ob,y_ob])
```

```
x_y_ob_val = 1×2
    3.7081    3.3541
```

Wizualizacja wyrażeń symbolicznych i funkcji

Wyrażenia symboliczne można wizualizować za pomocą funkcji ***fplot.*** Standardowe wywołanie bez żadnych dodatkowych zmiennych rysuje funkcję w zakresie od -5 do 5

```
clear variables
syms x y
f1=3*x^3-2*x-1
```

f1 = $3\,x^3 - 2\,x - 1$

```
fplot(f1)
grid on
```

Można zmienić przedział rysowania wprowadzając dodatkowy wektor zawierający początek i koniec przedziału np

```
fplot(f1,[-2 3])
grid on
```

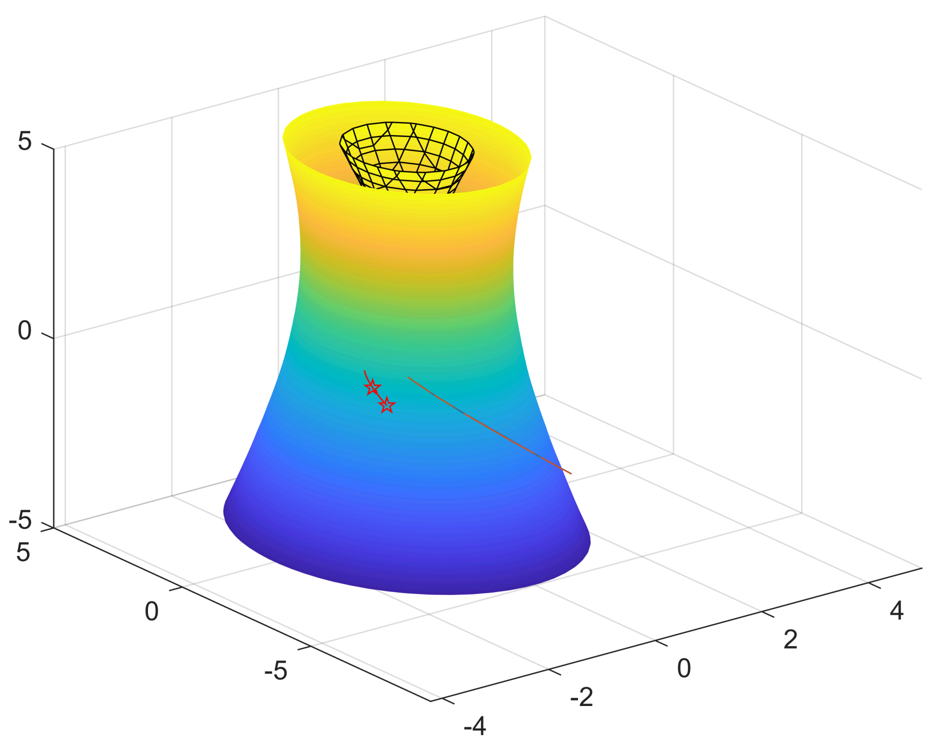
Chcąc dodać kolejny wykres, zatrzymujemy istniejący funkcją ***hold on*** i dodajemy kolejny. po zakończeniu zwalniamy blokowanie wykresu funkcją ***hold off***. kolejny wykres rysowany później nie jest dodawny, tylko zastępuje narysowane wcześniej wykresy.

```
hold on
f2=(sin(x/2))*x^2
```

f2 =

$$x^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

```
fplot(f2,[-2,3],'r-p')
hold off
```



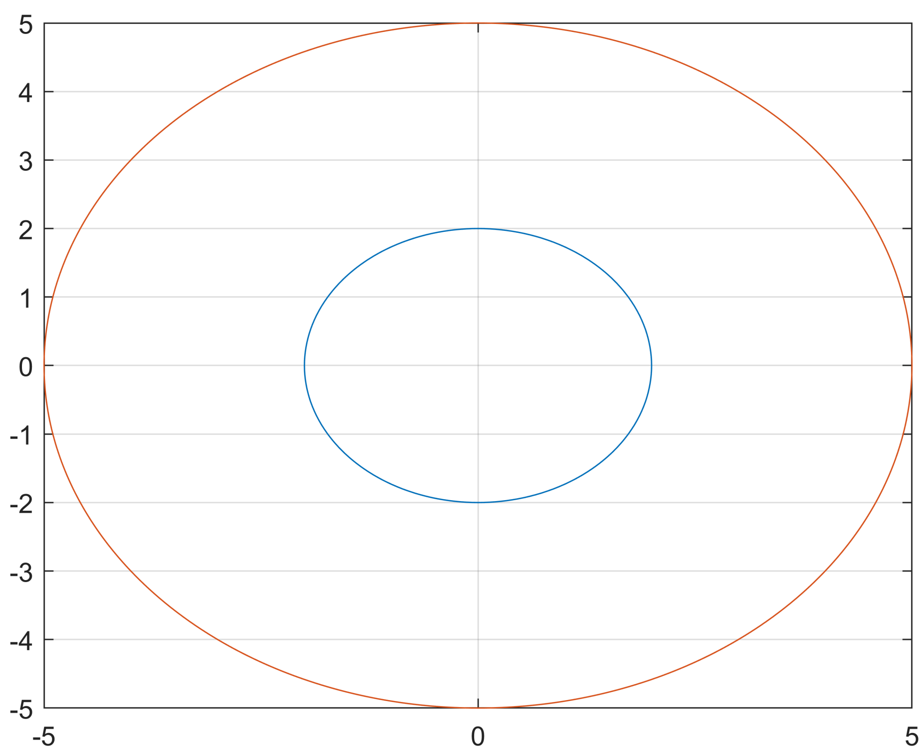
Ostatnii parametr użytej funkcji fplot zawiera specyjikację rodzaju linii. Można to definiować na róąne sposoby. Szczegóły odnośnie sposobów definiowania wykresów proszę doczytać w poradnikach Matlaba

Do wizualizacji funkcji dwóch zmiennych można użyć funkcji ***fimplicit***. Pokżmy to na podstawie funkcji równania okręgu

```
f3=x^2+y^2
```

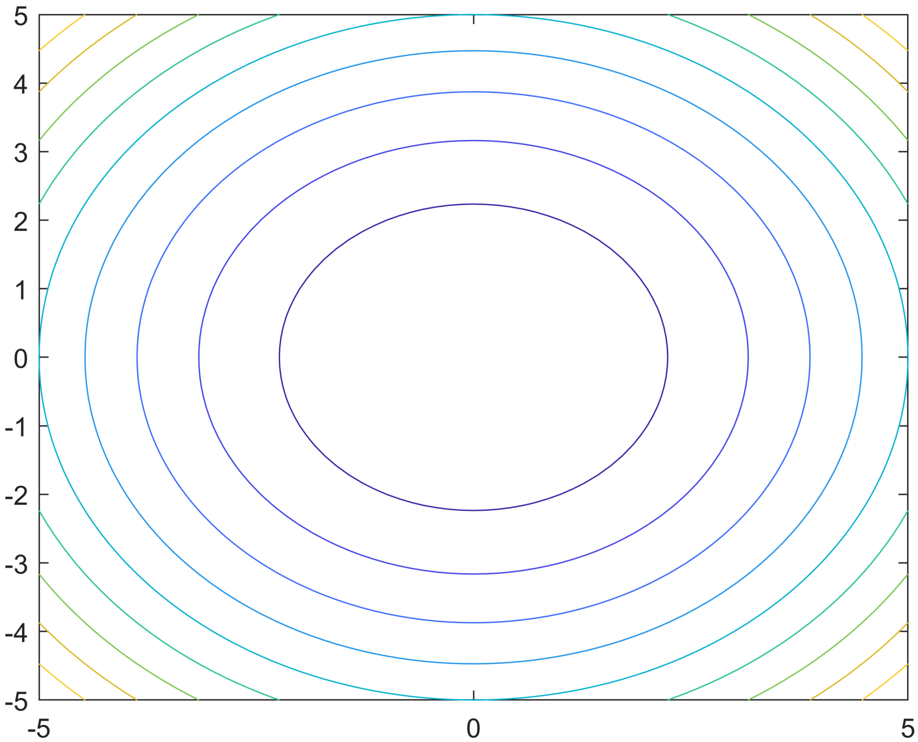
f3 = $x^2 + y^2$

```
fimplicit(f3==4)
hold on
fimplicit(f3==25)
grid on
hold off
```



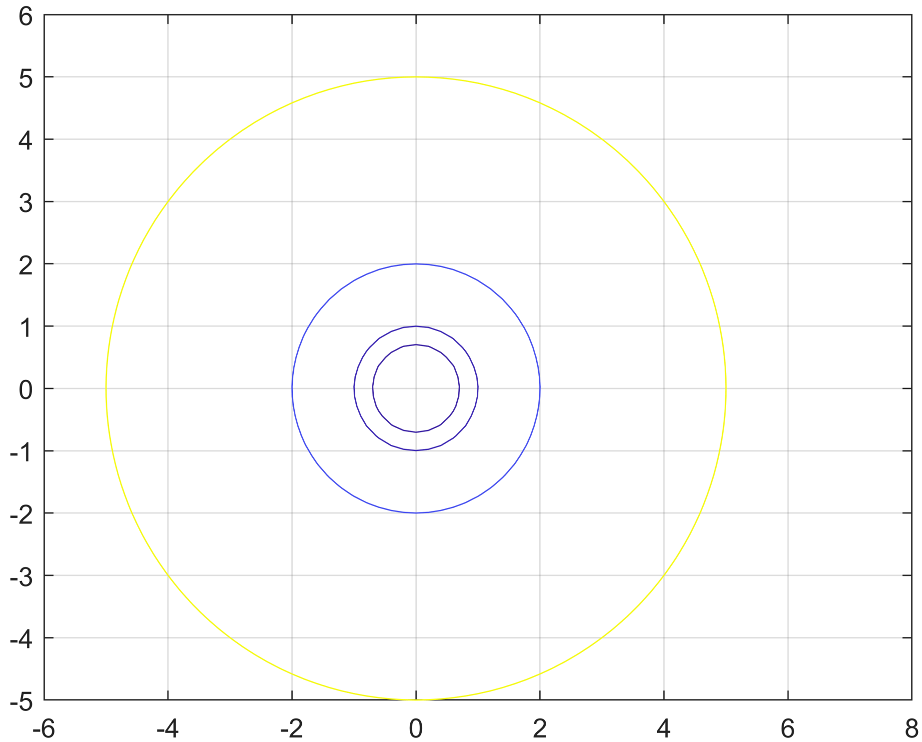
Dla rysowania wielu obrysów od razu mlożna wykorzystać funkcję ***fcontour.***

```
fcontour(f3)
```



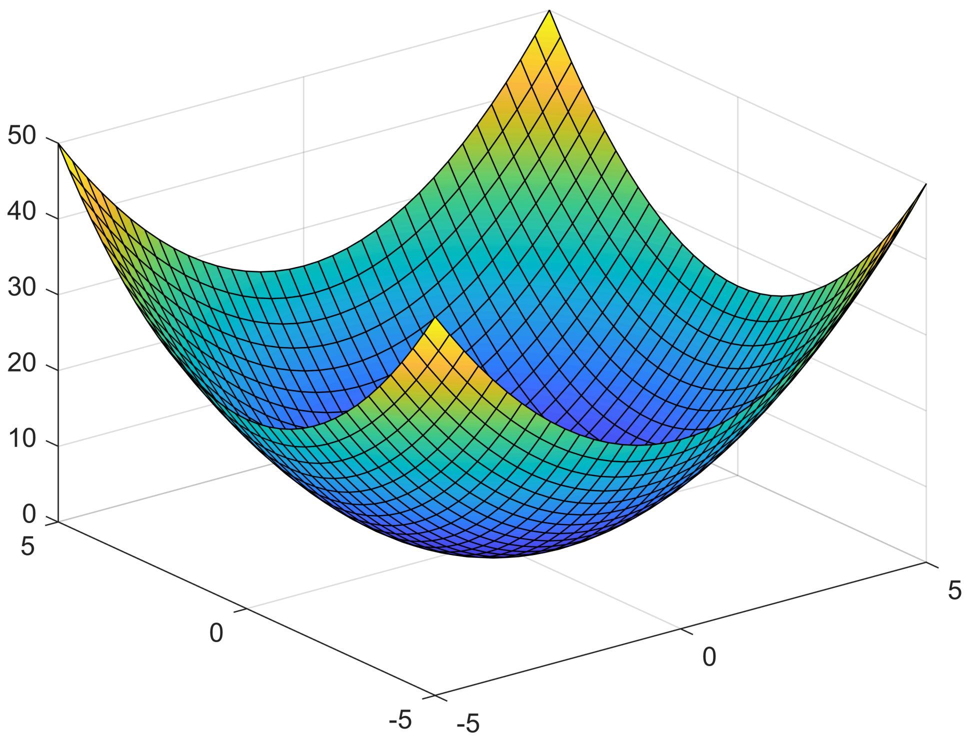
Możemy też zdefiniować cechy rysowanych obrysów. Jak przedstawiono poniżej, po nzawie rysowanej funkcji zdefiniowano obszar rysowania, a później w opcjach za pomocą *LevelList* wartości stanowiące rozwiązanie funkcji

```
fcontour(f3,[-6 8 -5 6],'LevelList',[0.5 1 4 25])
grid on
```



Funkcję dwóch zmiennych można także przedstawić przestrzennnie za pomocą funkcji ***fsurf.***

```
fsurf(f3)
```

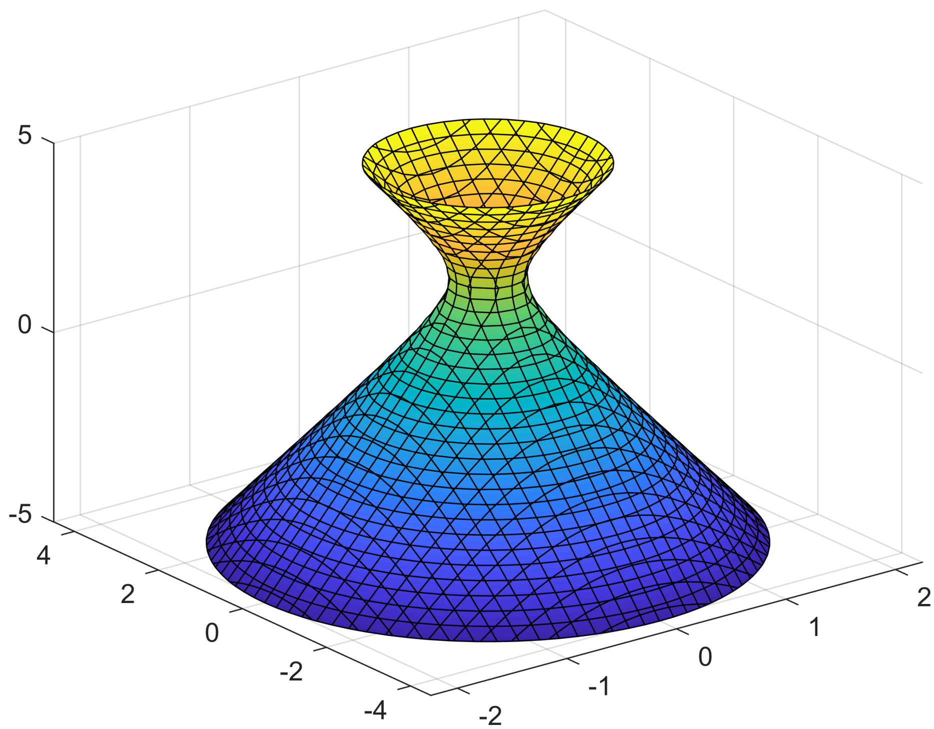


Trójelementowe wyrażenie lub funkcję można przedstawić w przestrzeni wykorzystując funkcję ***fimplicit3.***
Spełnienie warunku że funkcja 3 zmiennych = a przedstawiono poniżej

```
syms z
f3D=12*x^2+3*y^2-(z-2)^2
```

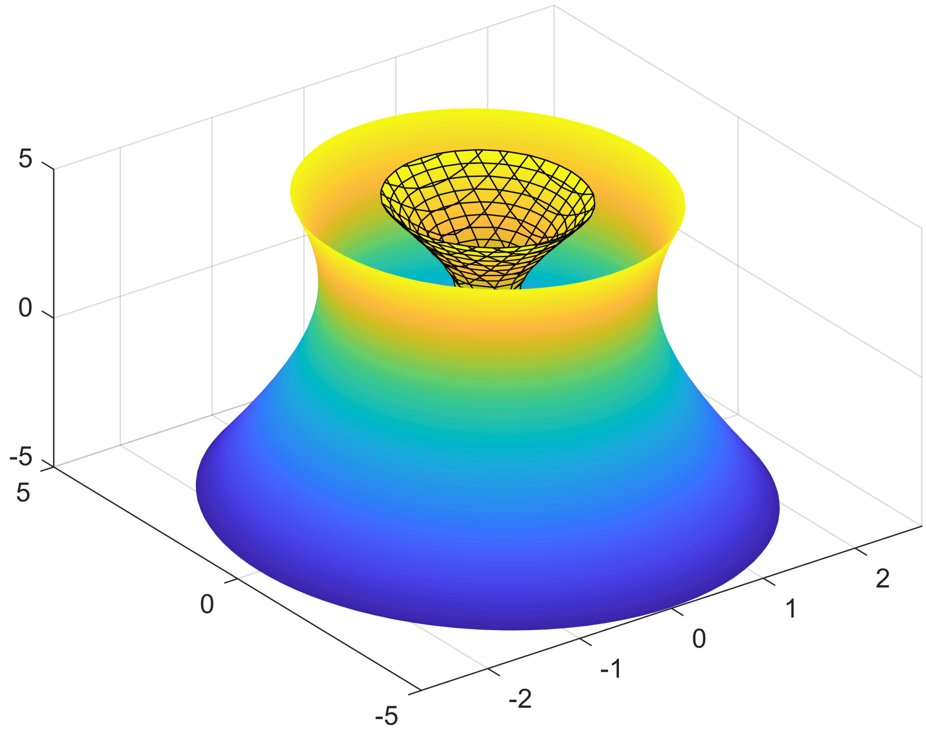
f3D = $12\,x^2 - (z-2)^2 + 3\,y^2$

```
fimplicit3(f3D==1)
```



Narysujmy dwoma róznymi sposobami funkcję f3D = 1 i f3D=25

```
fimplicit3(f3D==1)
hold on
fimplicit3(f3D==25,'EdgeColor',"none")
view([-36.30 42.97])
```



Pozostałe działania na wyrażeniach symbolicznych zostaną przedstawione w następnym wykładzie