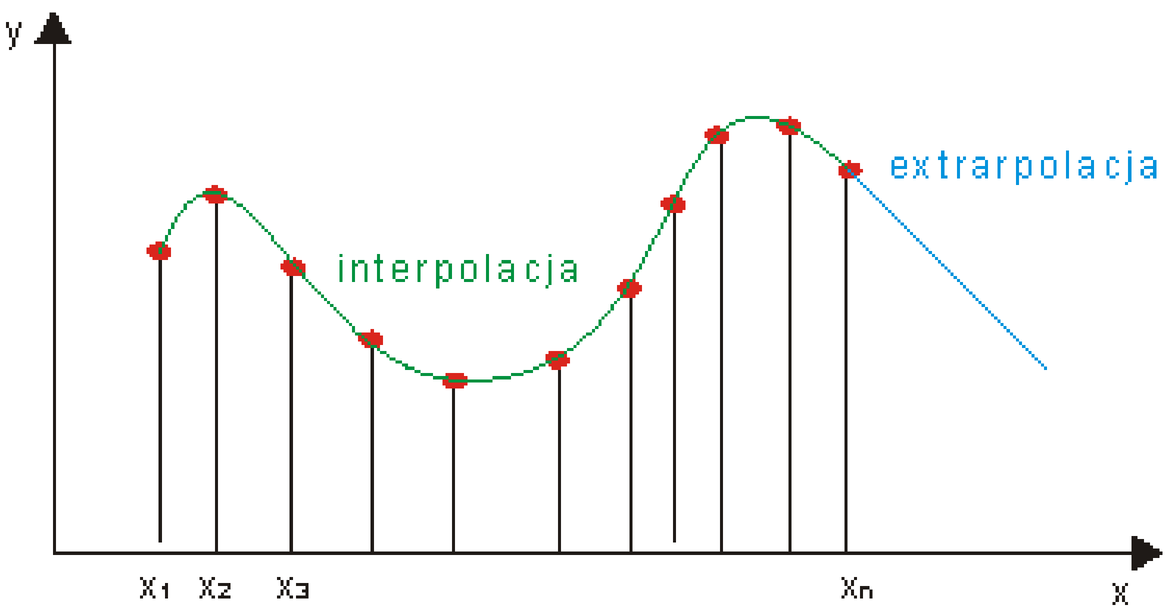
Interpolacja wielomianem

opracował dr inż. Robert JAKUBOWSKI, Politechnika Rzeszowska, Katedra Samolotów i Silników Lotniczych

Table of Contents

Interpolacją nazywamy postępowanie prowadzące do znalezienia wartości pewnej funkcji f(x) w dowolnym punkcie przedziału (x0, xn) na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach x0, x1, ..., xn, zwanych węzłami interpolacji (x0 < x1 < ... < xn) [1].

Postępowanie prowadzące do znalezienia wartości funkcji f(x) w punkcie leżącym poza przedziałem (x0, xn) nazywamy ekstrapolacją [1].

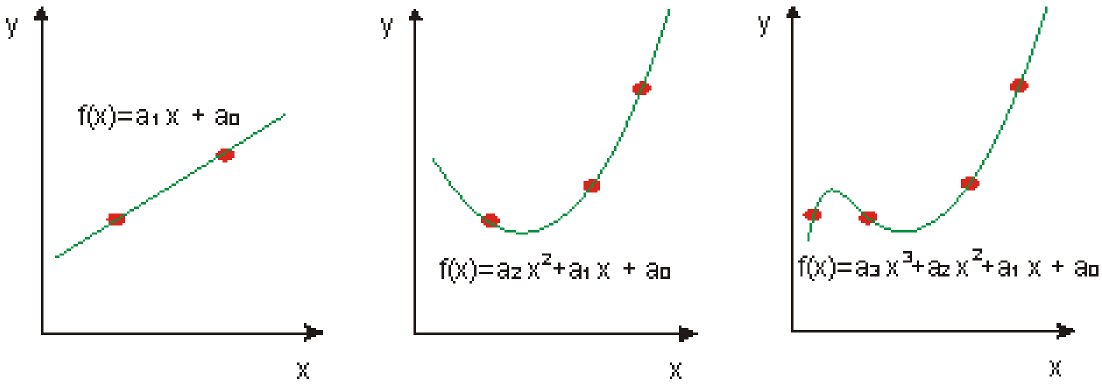


Rys 1. Przykład inerpolacji i ex1trapolacji

Najczęściej stosowaną metodą interpolacji jest interpolacja wielomianem

Interpolacja wielomianem

Interpolacja wielomianem polega na znalezieniu wielomianu interpolacyjnego, który będzie przechodził dokładnie przez zadane punkty węzłowe. Zgodnie z teorią na bazie n punktów węzłowych jesteśmy w stanie opisać wielomian interpolacyjny co najwyżej n-1go stopnia. To znaczy na dwóch punktach jesteśmy w stanie opisać wielomian pierwszego stopnia, na trzech punktach drugiego stopnia na trzech - czwartego, na 50 punktach - 49-go stopnia (patrz rys. 2)



Rys 2. Przykłady funkcji interpolacyjnej dla dwóch, trzech i czterech punktów.

Zadaniu interpolacji sprowadza się do znalezienia wskazźników wielomianu funkcji interpolującej na bazie posiadanych punktów. Omówmy zagadnienie na podstawie n punktów.

Dla zadanych n punktów czyli wektora x zawierającego n elementów i odpowiadającego temu wektora y zawierającego także n elemntów zadanie sprowadza się do wyznaczenie parametrów wielomianu n-1 stopnia czyli warości a(n-1) do a(0), czyli n-elementowy wektor a. Aby to zrobić potrzebne jest n równań. Te równania otrzymamy pisząc dla każedgo punktu równanie wiążace x1 poprzez zależność funkcyjną z wartością y dla danego pynktu.

$$a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \ldots + a_3 x_1^2 + a_2 x_1 + a_1 = y_1$$
$$a_n x_2^{n-1} + a_{n-1} x_2^{n-2} + \ldots + a_3 x_2^2 + a_2 x_2 + a_1 = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_n x_{n-1}^{n-1} + a_{n-1} x_{n-1}^{n-2} + \ldots + a_3 x_{n-1}^2 + a_2 x_{n-1} + a_1 = y_{n-1}$$
$$a_n x_n^{n-1} + a_{n-1} x_n^{n-2} + \ldots + a_3 x_n^2 + a_2 x_n + a_1 = y_n$$

Sprowadza się to zatem do rozwiązania układu równań liniowych ze względu na a_i, który w zapisie macieżowym można przedstawić:

$$\begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie sprowadza się więc do przygotowania odpowiednich macierzy na bazie punktów x i y, a następnie jedną z poznanych metod rozwiązania układu równań liniowych. Przykład funkcji relizującej takie zadanie przedstawiono w rozdziale Funkcje przygotowane do tematu pod nazwą interpolacja

Sprawdźmy działanie tej funkcji. Zadajmy pięć punktów w postaci wektora x1 i y1 i narysujmy je na wykresie:

```
x1=1:5;
y1=[0 2 2 1.5 5];
plot(x1,y1,"ro")
```

Dla tak przedstawionych punktów wyznaczmy wartość wskaźników wielomianu interpolacyjnego z wykorzystaniem przygotowanej funkcji:

```
a=interpolacja(x1,y1)
```

```
a = 1×5
    0.1250   -1.0000    1.8750    1.5000   -2.5000
```

Otrzymane w ten sposób wartości wielomianu możemy przeliczyć dla dowolnego x na wartość y. Wykorzystamy istniejącą w Matlabie funkcję ***polyval.*** Funkcję **polyval** wywołuje się w postaci ***y=polyval(a,x)***, gdzie a jest wektorem określającym parametry wielomianu poczwszy od stojącego przy najwyższej potedze, do tego przy x^0, zaś x jest parametrenm dla którego ma być wyznaczona wartość y.Wyznaczmy zatem wartości funkcji dla określonych x1 i porónajmy z wartościami y1

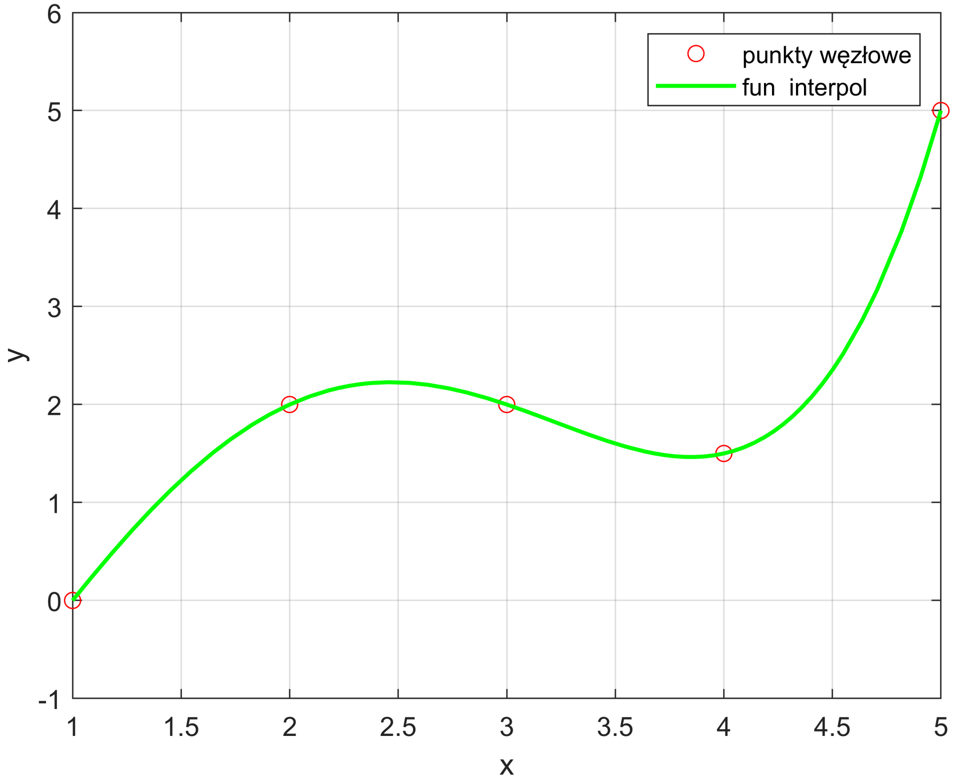
```
y_1=polyval(a,x1)
```

```
y_1 = 1×5
   -0.0000    2.0000    2.0000    1.5000    5.0000
```

Otrzymane wartości y_1 odpowidają zadanym wartościom y1.

Narysujmy funkcję w przedziale od x1(1) do x1(n) wykorzystując funkcję ***fplot***

```
hold on
fplot(@(x) polyval(a,x),[x1(1),x1(end)],'g',"LineWidth",1.5)
grid on
hold off
xlabel("x")
ylabel("y")
legend ("punkty węzłowe", "fun  interpol");
hold off
```



Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Najczęściej stosowanym podejściem do obliczeń wielomianu interpolującego jest metoda Lagrange'a. Wielomian interpolacyjny Lagranga otrzymuje się korzystając z zależności:

$$W(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \prod_{i=1\, i \neq j}^{n} \frac{(x - x_i)}{x_j - x_i} \right)$$

Przedstawmy zagadnienie dla punktów podobnie jak poprzednio

```
x1
```

```
x1 = 1×5
     1     2     3     4     5
```

```
y1
```

```
y1 = 1×5
         0    2.0000    2.0000    1.5000    5.0000
```

Obliczenia wykonamy wykorzystując obliczenia symboliczne. Wprowadźmy zmienną symboliczną x1

```
syms x
```

Rozpiszmy teraz poszczególne składniki sumy wielomianu. Zgodnie z przedstawioną zależnością będzie ich tyle, co punktów wekściowych 5. Zgodnie z zależnością poszczególne składniki przedstawiają się:

```
W1(x)=y1(1)*(x-x1(2))*(x-x1(3))*(x-x1(4))*(x-x1(5))/...
```

```
    ((x1(1)-x1(2))*(x1(1)-x1(3))*(x1(1)-x1(4))*(x1(1)-x1(5)))
```

W1(x) = 0

```
W2(x)=y1(2)*(x-x1(1))*(x-x1(3))*(x-x1(4))*(x-x1(5))/...
    ((x1(2)-x1(1))*(x1(2)-x1(3))*(x1(2)-x1(4))*(x1(2)-x1(5)))
```

W2(x) =

$$-\frac{(2\,x-2)\;(x-3)\;(x-4)\;(x-5)}{6}$$

```
W3(x)=y1(3)*(x-x1(1))*(x-x1(2))*(x-x1(4))*(x-x1(5))/...
    ((x1(3)-x1(1))*(x1(3)-x1(2))*(x1(3)-x1(4))*(x1(3)-x1(5)))
```

W3(x) =

$$\frac{(2\,x-2)\;(x-2)\;(x-4)\;(x-5)}{4}$$

```
W4(x)=y1(4)*(x-x1(1))*(x-x1(2))*(x-x1(3))*(x-x1(5))/...
    ((x1(4)-x1(1))*(x1(4)-x1(2))*(x1(4)-x1(3))*(x1(4)-x1(5)))
```

W4(x) =

$$-\frac{\left(\frac{3\,x}{2}-\frac{3}{2}\right)\;(x-2)\;(x-3)\;(x-5)}{6}$$

```
W5(x)=y1(5)*(x-x1(1))*(x-x1(2))*(x-x1(3))*(x-x1(4))/...
    ((x1(5)-x1(1))*(x1(5)-x1(2))*(x1(5)-x1(3))*(x1(5)-x1(4)))
```

W5(x) =

$$\frac{(5\,x-5)\;(x-2)\;(x-3)\;(x-4)}{24}$$

Zsumujmy te skladniki w celu wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego:

```
W(x)=W1+W2+W3+W4+W5
```

W(x) =

$$\frac{(2\,x-2)\;(x-2)\;(x-4)\;(x-5)}{4}-\frac{(2\,x-2)\;(x-3)\;(x-4)\;(x-5)}{6}+\frac{(5\,x-5)\;(x-2)\;(x-3)\;(x-4)}{24}$$

Wykorzystując funkcję ***expand*** uprośćmy to wyrażenie:

```
W1(x)=expand(W)
```

W1(x) =

$$\frac{x^4}{8}-x^3+\frac{15\,x^2}{8}+\frac{3\,x}{2}-\frac{5}{2}$$

Sprwdźmy poprawność wyznaczonego wielomianu obliczając wartości dla przyjętych punktach węzłowych

```
y_2=W(x1);
```

```
y_2=double(y_2)
```

```
y_2 = 1×5
         0    2.0000    2.0000    1.5000    5.0000
```

Wyznaczone wartości y_2 są zgodne z wartościami y1, czyli w węzłach otrzymaliśmy takie same wartości, jak przyjęto do interpolacji, co wskazuje, że metoda działa poprawnie.

Procedurę wyznacznia wielomianu interpolacyjnego metodą Lagrange'a zawarto w funkcji interpolacja_l. W wyniku działania funkcji otrzymuje się wynik będący funkcją zmiennej x. Sprwdźmy wynik działania funkcji dla wcześniej przyjętych punktów x1 i y1

```
syms x

WL(x)=interpolacja_l(x1,y)
```

WL(x) =

$$\frac{x^4}{8} - x^3 + \frac{15\,x^2}{8} + \frac{3\,x}{2} - \frac{5}{2}$$

Otrzymana funkcją jest dokładnie taka, jak poprzednio wyznaczono to na przykłądzie zrobionym wcześniej.

Funkcje interpolacyjne w Matlabie

Do interpolacji w Matlabie można wykorzystać funkcję polyfit. Na bazie podanych punktów pozwala ona wyznaczyć prametry wielomianu interpolacyjnego. Wywołanie funkcji ***P=polyfit(x,y,n)***. Zmiennymi wejściowymi są wektory x i y, które określają położenie punktów węzłowych oraz stopień wielomianu n. Dla interpolacji stopień n powinien mieć wartość n-1. Otrzymany wektor P zawira parametry wielomianu interpolacyjnego w postaci P=[P1, P2, P3 .. Pn], takie że

$$W(x) = \mathrm{P}_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + . . + P_{n-1} x + P_n$$

Sprawdźmy działanie tej funkcji. Ponieważ daje ona takie same wyniki jak pierwsza z prezentowanych metod, gdzie wartości wskaźników wielomianu interpolacyjnego wyznaczyliśmy jako a. Za x podstawimy x1, a za y - y1. Ponieważ mamy wektor pięcioelementowy, dlatego stopień wielomianu interpolacyjnego jest n=

Przypomnijmy wartości x1, y1 i a:

```
x1
```

```
x1 = 1×5
     1     2     3     4     5
```

```
y1
```

```
y1 = 1×5
         0    2.0000    2.0000    1.5000    5.0000
```

```
a
```

```
a = 1×5
```

```
    0.1250   -1.0000    1.8750    1.5000   -2.5000
```

Poszukajmy parametrów wielomianu interpolacyjnego metodą polyfit

```
P=polyfit(x1,y1,4)
```

```
P = 1×5
    0.1250   -1.0000    1.8750    1.5000   -2.5000
```

P jest takie same jak a, a zatem otrzymaliśmy dokładnie ten sam wielomian

W tym przypadku podobnie jak poprzednio do wyznaczenia wartości funkcji interpolujacej dla danego x wykorzystamy funkcję ***polyval***. Pokażmy działanie metody na przykładzie kilku punktów, które przedstawimy graficznie.

```
plot(x1,y1,'or')
```

Wprowadzamy punkty dla których wyznaczymy wartości funkcji z wykorzystaniem wyznaczonego wielomianu

```
x2=x1(1)-1:0.3:x1(end)+0.5
```

```
x2 = 1×19
         0    0.3000    0.6000    0.9000    1.2000    1.5000    1.8000    2.1000 ···
```

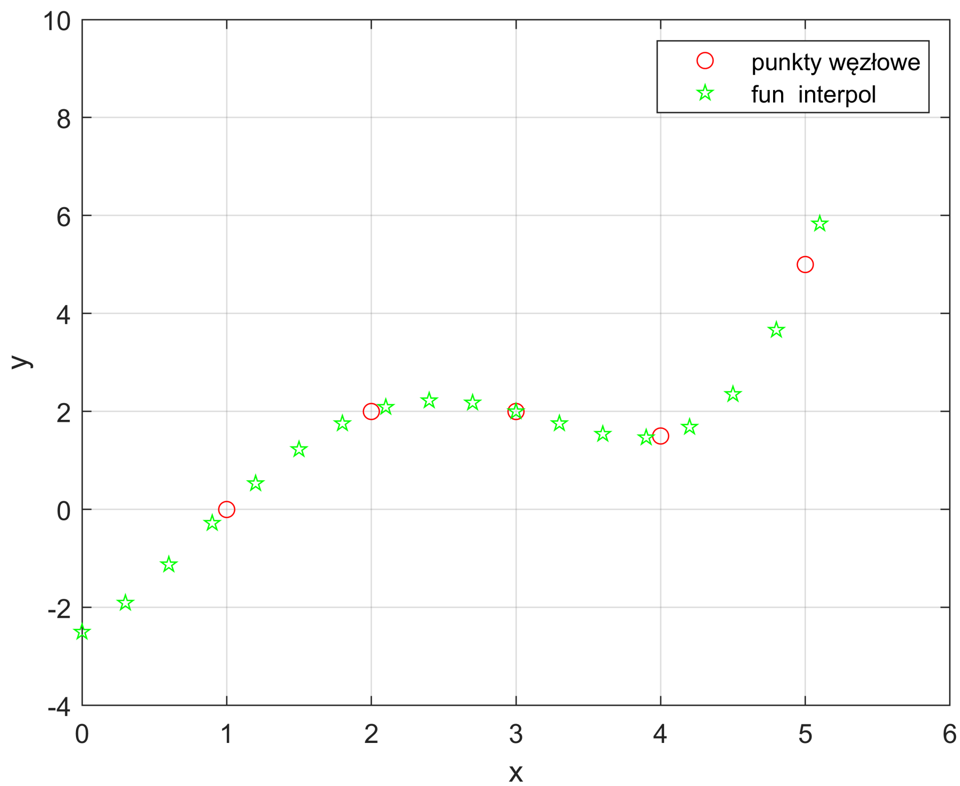
Wyznaczamy wartości y2

```
y2=polyval(P,x2)
```

```
y2 = 1×19
   -2.5000   -1.9072   -1.1248   -0.2782    0.5312    1.2266    1.7552    2.0888 ···
```

Wyznaczone wartości punktów przedstawimy graficznie punktami w kolorze zielonym

```
hold on
grid on
plot(x2,y2,'gp')
xlabel("x")
ylabel("y")
legend ("punkty węzłowe", "fun  interpol");
hold off
```



Gdy nie interesuje nas wyznaczenie funkcji interpolującej, a jedynie wyznaczenie wartości pomiędzy węzłami interpolacyjnymi, to można skorystać z funkcji ***interp1.*** Wywołanie funkcji jest następujące ***y=interp1(x1,y1,x,metoda)***. Zmiennymi wejściowymi w tym przypadku jest wektor x dla którego chcemy wyznaczyć wartości y, oraz dane punktów węzłowych x1, y1. Można opcjonalnie wskazać metodę interpolacji metoda np "linear" "pchip" "spline" itp - inne metody patrz Matlab help.

Przeanalizujmy jakie wyniki interpolacji dostaniemy wykorzystując tą funkcję z różnymi metodami. Weźmy pod uwagę te same węzły interpolacji, co wcześniej, a wartości x dla których wycznaczymy parametry wielomianu będą znajdowały się pomiędzy nimi. Na przykład przyjęte x_

```
x_=x1(1):0.2:x1(end);
```

Wyznaczone wrtości y dla tej metody zapiszemy jako y_lin

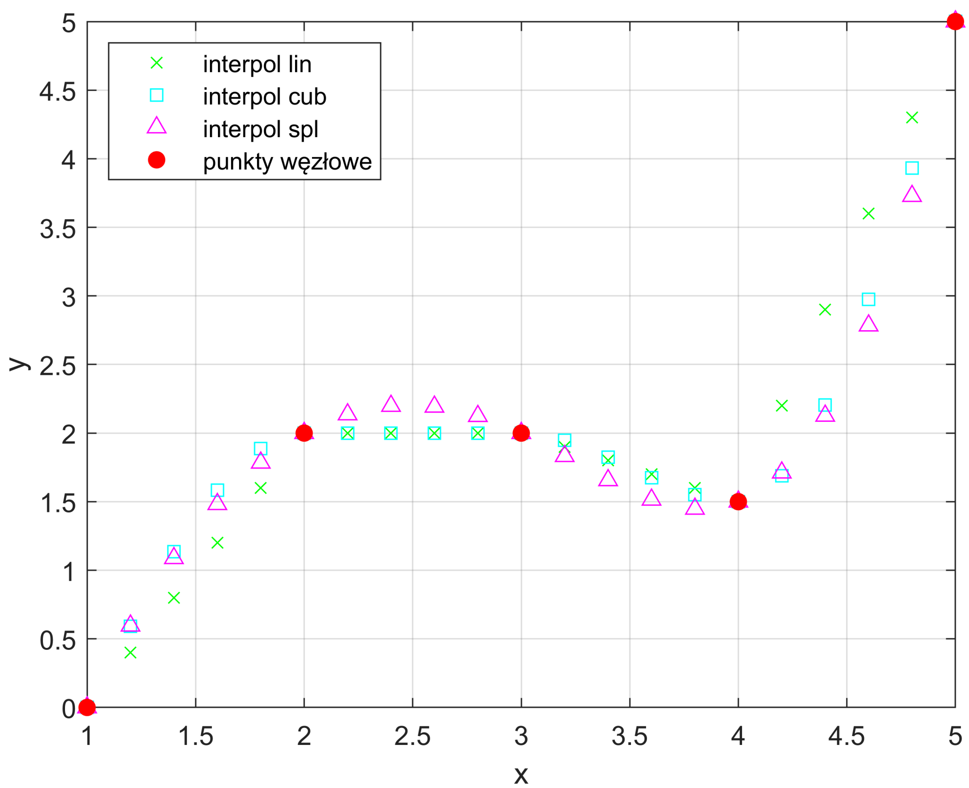
```
y_lin=interp1(x1,y1,x_,"linear");
plot(x_,y_lin,'xg')
hold on
grid on
```

Tym razem skorzystamy z interpolacji funkcją trzeciego stopnia pomiędzy węzłami metoda cubic, obecnie rekomendowana pod nazwą pchip.

```
y_cub=interp1(x1,y1,x_,"pchip");
plot(x_,y_cub,"cs")
```

Wartości wyznaczone metodą interpolacji splainem zapiszemy jako y_spl

```
y_spl=interp1(x1,y1,x_,"spline");
plot(x_,y_spl,"m^")
plot(x1,y1,'or','MarkerFaceColor',"r")
xlabel("x")
ylabel("y")
legend ("interpol lin", "interpol cub", "interpol spl", "punkty węzłowe","Location","northwest'
hold off
```



W zależności od przyjętej metody obliczeń punktów pomiędzy węzłami w prezentowanej metodzie mamy rózne wartościdla punktów pośrednich

Ćwiczenia do tematu

Utworzyć wektory x1 y1 zawierających osiem pónktów, Następnie dla tych punktów znaleźć wielomian interpolacyjny w postaci funkcji W(x) wykorzystując funkcję **interpolacja_l.** W kolejnym kroku wyznaczyć wartości parametrów wielomianu interpolacyjnego inną metodą i porównać wyniki.

Na koniec narysować punkty węzłowe, i wielomian na wykresie dodać legendę i opis osi.

Funkcje przygotowane do tematu

Funkcja interpolacja do wyznaczania wskaźników wielomianu interpolacyjnego dla zadanych punktów w postaci wektora x y. Zmienna wyjściowa a zawiera parametry wielomianu interpolacyjnego także a1 stoi przy najwyższej potędze x, a an jest wyrazem wolnym

```
function a=interpolacja(x,y)
% sprawdzenie ilości elementów wektora x i y
[s1,s2]=size(x);
[s3,s4]=size(y);
if or(s1~=s3,s2~=s4)
    % brak rozwiązania, ze względu na nierówną ilość elementów x i y
    a=NaN;
    display "Wymiar wektora x i y powinien być taki sam"
else

    if s1==1
        % odwracanie wektora w przypadku gdy jest on wektorem wierszowym
        y=y';
        x=x';
    end
    %================= W tej części jest zawarte rozwiązanie zadania
    if s1==1 || s2==1 %funkcja lub zpisana inaczej niż wczesniej
        n=length(x);
        i=0;
        %Tworzenia wektora x1 do rozwiązania ukąłdu równań x1*A=Y
        for j=n-1:-1:0
            i=i+1;
            x1(:,i)=x.^j;
        end
        %Wyliczenie rozwiązania -rozwiązanie ukłądu równań ze względu na A
        a=x1^-1*y;
        % Zamiana a z kolumny na wiersz
        a=a';
    %===================================================
    else
        % brak rozwiązania, gdy zmienne są macierzami zamiast wektorów
        a=NaN;
        display "Obydwie zmienne powinny być wektorami o takiej samej ilości elementów"
    end
end
end
```

Funkcja **interpolacja metodą Lagrange'a**. Zmienne wejściowe, to zbiór współrzędnych węzłów interpolacyjnych x1 i y1. Wynikiem jest funkcja zmiennej x- wielomian interpolacyjny - W(x)

```
function W=interpolacja_l(x1,y1)
    n=length(x1);
    % wprowadzamy zmienną symboliczną x
    syms x
    %Przypisujemy początkową wartość wielomianu interpolacyjnego równą 0
    W(x)=0*x;
    %Iteracyjnie w n krokach wyznacza się wielomian interpolacyjny
```

```
    for i=1:n
        % wprowadzamy wektor pomocniczy xp który zawiera wszystkie x1 za
        % wyjątkiem x1(i)
        xp=[x1(1:i-1),x1(i+1:n)];
        Wp(x)=1+0*x;

        for j=1:n-1
            Wp(x)=Wp*(x-xp(j))/((x1(i)-xp(j)));
        end
        W(x)=W+y1(i)*Wp;
    end
    W(x)=expand(W);
end
```

Literatura

[1] Pańczyk B. i in.; Metody Numeryczne w przykładach, Politechnika Lubelska, Lublin 2012

[2] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.; Metody Numeryczne; Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa

2001