Działania w Matlabie na wyrażeniach symbolicznych cz. 2

Opracował dr. inż Robert Jakubowski, Politechnika Rzeszowska, KSiSL

Table of Contents

Różniczkowanie

Obliczenia pochodnych z wyrażeń algebraicznych można realizować funkcją ***diff***. Przykładowe obliczenia wartości pierwszej pochodnej z wyrażenia:

$y = 3 * x^2 + 2 * x - e^x$

```
syms x
y=3*x^2+2*x-exp(x)
```

y = $2\,x - e^x + 3\,x^2$

```
dydx=diff(y)
```

dydx = $6\,x - e^x + 2$

Wyznaczenie drugiej pochodnej z wyrażenia y można zrealizować na dwa sosoby. Pierwszym jest wyznaczenie wartości pierwszej pochodnej, co już zrobiliśmy, a następnie wyznaczenie wartości pochodnej z pochodnej czyli:

```
d2ydx=diff(dydx)
```

d2ydx = $6 - e^x$

Drugim sposobem jest wyznaczenie od razu wartości drugiej pochodnej z wyrażenia y w następujący sposób

```
d2ydx_2=diff(y,2)
```

d2ydx_2 = $6 - e^x$

Porównując otrzymane obydwoma metodami wyniki są one takie same.

Gdybyśmy chcieli wyznaczyć trzecią pochodną z wyrażenia y to:

```
d3ydx=diff(y,3)
```

d3ydx = $-e^x$

Chcąc obliczyć wartość pochodnej w punkcie, można najpierw wyznaczyć określoną pochodną, a następnie w miejsce zmiennej podstawić określoną wartość wykorzystując funkcje ***subs*** i ***double***

```
d2ydx_5=double(subs(d2ydx,x,5))
```

d2ydx_5 = -142.4132

W funkcji diff można też wskazać zmienną, po której będziemy relizować różniczkowanie. Jest to istotne wtedy, gdy mamy więcej zmiennych w wyrażeniu. W takim wypadku na drugiej pozycji wpisujemy tą zmienną po której chcemy różniczkować.

```
syms x y a
fxy=a*x^3+2*x^2*y-y^3-2*a*y
```

fxy = $a\,x^3 + 2\,x^2\,y - y^3 - 2\,a\,y$

Pierwsza i druga pochodna funkcji po zmiennej x będzie:

```
dfdx=diff(fxy,x)
```

dfdx = $3\,a\,x^2 + 4\,y\,x$

```
dfdx2=diff(fxy,x,2)
```

dfdx2 = $4\,y + 6\,a\,x$

Zrobienie tego samego dla zmiennej y:

```
dfdy=diff(fxy,y)
```

dfdy = $2\,x^2 - 3\,y^2 - 2\,a$

```
dfdy2=diff(fxy,y,2)
```

dfdy2 = $-6\,y$

Całkowanie

Całkowaanie wyrażeń algebraicznych z wykorzystaniem obliczeń symbolicznych realizuje się wykorzystując funkcję ***int.*** Przykładowe obliczenie wartości całki można wykonać jak przedstawiono poniżej:

$$\int (\sin(2x) - x^2)\mathrm{dx}$$

```
clear variables
syms x
y=sin(2*x)+x^2
```

y = $\sin(2\,x) + x^2$

```
cal_y=int(y)
```

```
cal_y =
```

$$\frac{x^3}{3} - \cos(x)^2$$

Gdy chcemy zdefiniować zmienną po której odbywa się całkowanie wtedy tą zmienną wstawia się na drugiej pozycji. Przyjżyjmy się wynikom całkowania, gdy jako zmiennną całkowania wyrażenia y wstawi się x lub z

```
syms z
cal_yx=int(y,x)
```

```
cal_yx =
```

$$\frac{x^3}{3} - \cos(x)^2$$

```
cal_yz=int(y,z)
```

`cal_yz =` $z\,(\sin(2\,x) + x^2)$

Obliczanie całki określonej w granicy od x1 do x2, gdzie x1 jest początkiem, a x2 końcem przedziału całkowania można wykonać podajac granice całkowania na kolejnych pozycjach. Chcąc wyliczyć przedstawioną poniżej całkę:i

$$P = \int_0^2 (\sin(2x) - x^2)\mathrm{dx}$$

w Matlebie będzie to zapisane:

```
P=int(y,x,0,2)
```

```
P =
```

$$\sin(2)^2 + \frac{8}{3}$$

```
Pval=double(P)
```

```
Pval = 3.4935
```

Wykorzystano funkcję ***double*** do przeliczenia zmiennej symbolicznej na zmienną numeryczną

Jak powszechnie wiadomo całkę oznaczoną można wykorzystać do obliczeń pola powierzchni pod wykresem, albo objętości figury przestrzennnej.

Obliczanie pola powierzchni z wykorzystaniem całki oznaczonej

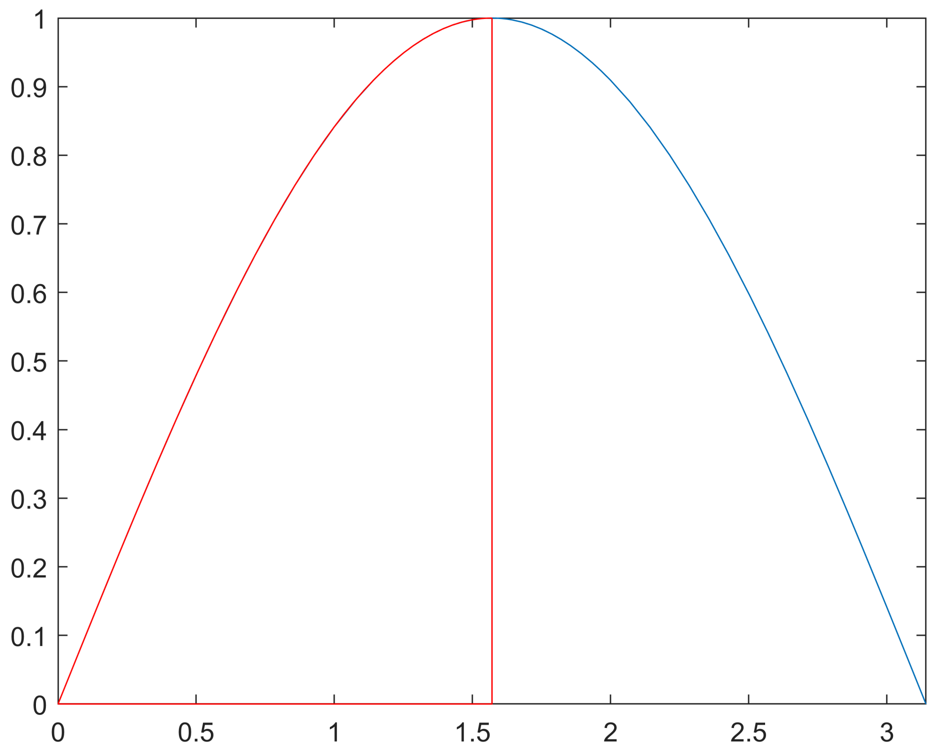
Policzmy pole powierzchni pod krzywą zakreśloną przez funkcję sin(x) w przedziale od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Zacznijmy od narysowania funkcji sin(x) w przedziale od 0 do π

```
fplot(sin(x),[0,pi])
```

Pokażmy obszar który chcemy policzyć

```
hold on
plot([0,pi/2,pi/2],[0,0,sin(pi/2)],'r-')
fplot(sin(x),[0,pi/2],'r-')
hold off
```



Wyznaczmy wartość pola pod krzywą wykorzystyjąc całkę oznaczoną, czyli:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{dx}$$

```
P=double(int(sin(x),x,0,pi/2))
```

```
P = 1
```

Pole całego pokazanego przebiegu sinusoidy

$$P = \int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{dx}$$

```
P=double(int(sin(x),x,0,pi))
```

```
P = 2
```

Obliczanie pola powierzchni z wykorzystaniem podwójnej całki oznaczonej

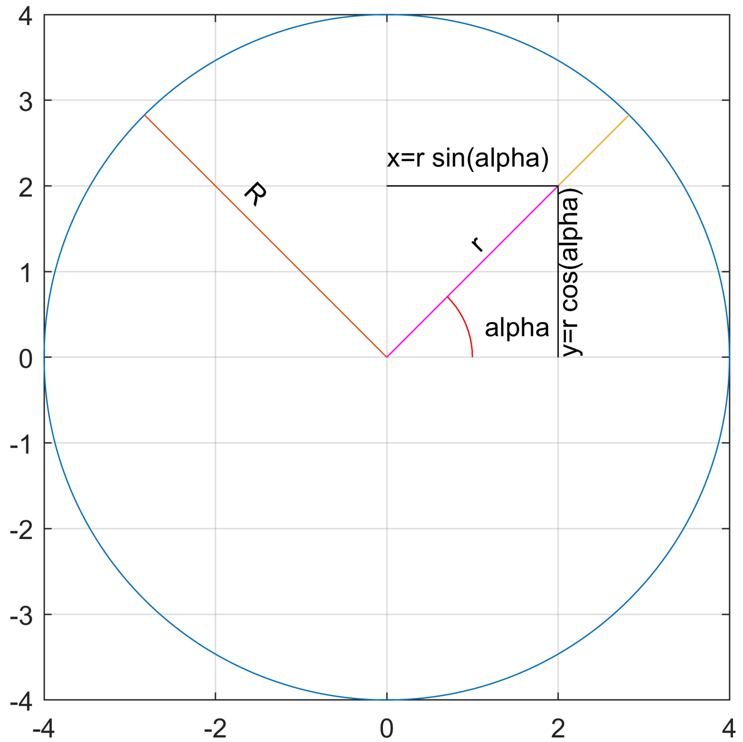
Wynacznie pola łuku koła oraz pola koła o zadanym promieniu

Jeżeli w czasie całkowania wyznacza się zmianę w obydwu kierunkach x i y, to do obliczania pola wykorzystuje się całkę podwójną. Rozpatrzmy to na przykładzie obliczeń pola całego koła, lub jego części

Rozwiązanie zadania można wykonać wykorzystyjąc opis położenia punktów x i y jako zależności od promienia r i kąta α, jak pokzano na rysunku.

```
clear variables
syms x y
fimplicit(4^2==x^2+y^2)
axis('equal','on')
grid on
hold on
%plot max radius
plot([0,4*cos(3*pi/4)],[0 4*sin(3*pi/4)])
text(-1.6,2,'R',"Rotation",-45)
%plot radius
plot([0,4*cos(pi/4)],[0 4*sin(pi/4)])
plot([0,2],[0,2],'m')
text(1,1.3,'r',"Rotation",45)
%plot arc of ungle
xpom=cos(pi/4:-pi/4/10:0);
ypom=sin(pi/4:-pi/4/10:0);
plot(xpom,ypom,'r-')
text(1.2*cos(pi/10),1.2*sin(pi/10),'alpha')

%plot x y line
plot([2,2,0],[0,2,2],'k')
text(2.1,0.,'y=r cos(alpha)','Rotation',90)
text(0.,2.35,'x=r sin(alpha)')
hold off
```



Zgodnie z przedstawionym rysunkiem współrzędne x i y dla zadanego kąta i długości promienia są wyrażone zależnością:

$$x = r * \cos(\alpha)$$
$$y = r * \sin(\alpha)$$

```
syms x y r alpha
x=r*cos(alpha)
```

x = $r\cos(\alpha)$

```
y=r*sin(alpha)
```

y = $r\sin(\alpha)$

Oczywiście maksymalna wartość promienia zdefiniowana jest jako R.

Definiując zmienną Prom jako długość promienia dla danej wartości r i α

Pole zakreślone przez promień (Prom) dla kąta α można policzyć jako całkę podwójną ze zmiany promienia Prom względem jego długości od 0 do R i kąta od 0 do α_k czyli

$$P_l = \int_0^R \int_0^{\alpha_k} \text{Prom} \; d\alpha \, \mathrm{dr}$$

gdzie Prom można zdefiniować jako

$$\mathrm{Prom} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ze względu na tok obliczeń, celowo wprowadzono zmienną Prom różną od r, wynika z tąd, że Prom jest funkcją r i α.

Załużmy, że obliczenia będę prowadzone dla 1/4 wycinka koła o promieniu R=4. Stąd zadanie sprowadza sie do rozwiązania.

$$P_l = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Prom}\, d\alpha\, \mathrm{dr}$$

```
%Wyznaczamy zmienną Prom
Prom=sqrt(x^2+y^2)
```

Prom = $\sqrt{r^2 \cos(\alpha)^2 + r^2 \sin(\alpha)^2}$

```
%Obliczamy całkę po kącie alpha ze zmennej Prom
P_p_alpha=int(Prom,alpha,[0,pi/2])
```

P_p_alpha =

$$\frac{\pi \sqrt{r^2}}{2}$$

```
%Obliczamy całkę po zmiennej r ze zmiennej P_p_alpha
P_p=int(P_p_alpha,r,[0,4])
```

P_p = 4π

```
P_p_val=double(subs(P_p))
```

P_p_val = 12.5664

Dla sprawdzenia wyznaczmy wartość pola ćwierci koła z klasycznej metody

```
Pp=pi*4^2/4
```

Pp = 12.5664

Wynik obliczony za pomocą całki podwójnej jest zgodny z wynikiem otrzymanym ze wzoru na pole powierzchni 1/4 wycinka kołowego

Policzmy teraz pole całego koła, czyli całkę podwujną w postaci:

$$P_l = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \mathrm{Prom}\, d\alpha\, \mathrm{dr}$$

```
%Obliczamy całkę po kącie alpha ze zmennej Prom
P_p_alpha=int(Prom,alpha,[0,2*pi])
```

P_p_alpha = $2\pi \sqrt{r^2}$

```
%Obliczamy całkę po zmiennej R ze zmiennej P_p_alpha
P_p=int(P_p_alpha,r,[0,4])
```

P_p = 16π

```
P_p_val=double(subs(P_p))
```

P_p_val = 50.2655

```
%Dla sprawdzenia wyznaczmy wartość pola ćwierci koła z klasycznej metody
Pp=pi*4^2
```

Pp = 50.2655

Podany sposób można wykorzystać do wyznaczenia zależności ogólnej na pole koła. W tym celu musielibyśmy rozwiązać całkę podwójną gdzie granica całkowania po r jest zmienną symboliczną R:

$$P_k = \int_0^R \int_0^{2\pi} \mathrm{Prom}\, d\alpha\, \mathrm{dr}$$

Ponieważ całkę wewnętrzną mamy policzonną pod zmienną P_p_alpha, wiec zostaje tylko policzyć całkę zewnętrzną

```
syms R
P_k=int(P_p_alpha,r,[0,R])
```

P_k = πR^2

Wynik obliczeń dał nam dobrze znany wzór na pole koła w funkcji promienia R.

Obliczanie objętości z wykorzystaniem całki oznaczonej podójnej

Zgodnie z definicją objętość bryły będzie wyrażona za pomocą całki podwójnej, czyli

$$\int_{\mathrm{y1}}^{\mathrm{y2}} \int_{\mathrm{x1}}^{\mathrm{x2}} f(x, y)\mathrm{dxdy}$$

Taką metodą można obliczać pola figur gdzie zmienna z jest określona jako funkcja zależna od dwóch pozostałych.

Załóżmy, że mamy powieżchnię opisaną równaniem:

$z = 3 - x^6 - y^2$y

Policzmy objętość jaką będzie stanowić bryła ograniczona od dołu płaszczyzną XY od góry powierzchnią z oraz na osi x i y przedziałem -1 do 1. Matematycznie było by to zapisane

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} z(x, y)\mathrm{dxdy}$$

Zapiszmy to w postaci wyrażenia symbolicznego i przedstawmy na wykresie

```
clear variables
```

```
syms x y
z(x,y)=3-x.^6-y.^2
```

z(x, y) = $-x^6 - y^2 + 3$

Policzmy wartości z1=z(x,y) dla x i y w przedziale od -1 do 1.

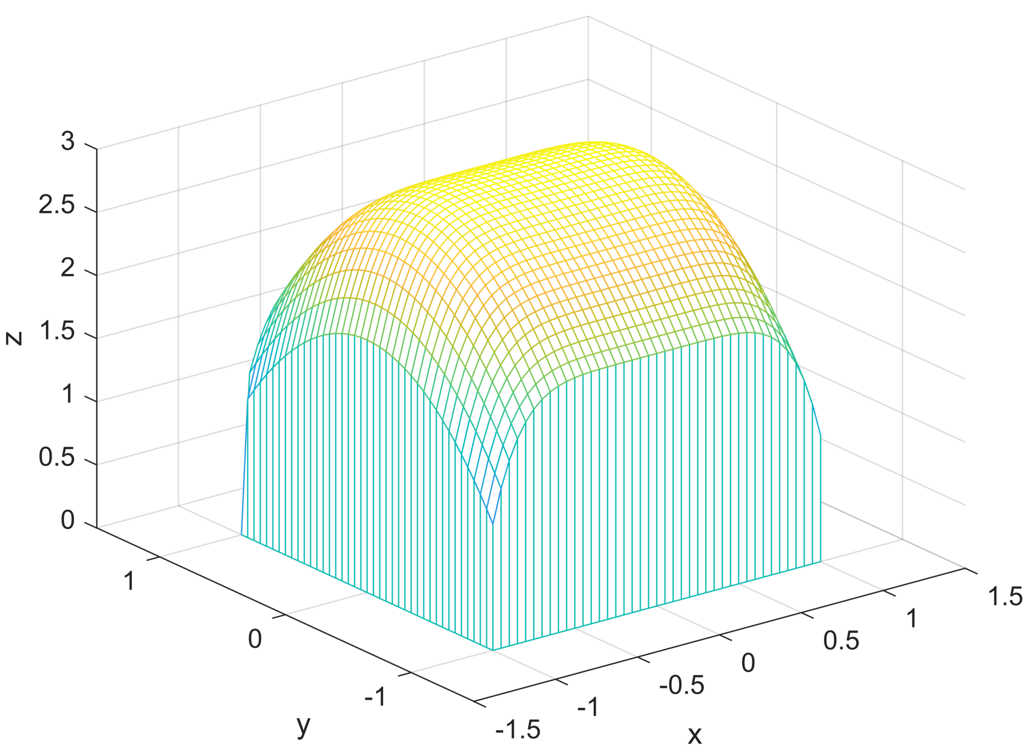
Przedstawienie graficzne obliczanej objętości

Wykorzystajmy funkcję ***meshgrid*** do przygotowania tablicy z wartościami x i y i następnie te tablice podstwimy do funkcji z

```
[x1,y1]=meshgrid(-1:0.05:1);
[z1]=double(z(x1,y1));
z1(size(z1))=0;
```

Wykorzystując funkcję ***meshz*** narysujemy interesujący nas profil, a przez dodanie punktu 0,0,0 narysujemy wycinek zaczynajcy się od płaszczyzny XY

```
meshz(x1,y1,z1)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 0 3])
```



Wyznaczanie objętości

Policzymy oznaczoną całkę podwójną rozbijając ją na dwie całki wyznaczane kolejno względem zmiennej x i y z wyrażena z

```
V_x=int(z,x,-1,1)
```

V_x(y) =

$$\frac{40}{7}-2\,y^2$$

```
V=double(int(V_x,y,-1,1))
```

V = 10.0952

Ćwiczenie z wyznaczania objętości

Policz ile będzie wynosiła objętość bryły gdy granica całkowania dla y zmieni się na przedział od 0 do 1.

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 z(x,y)\mathrm{dxdy}$$

Czy wynik będzie połową objdtości wyliczonej powyżej?

Ćwiczenie z wykorzystaniem całki potrójnej do obliczeń objętości

Na podstawie przykładu obliczeń pola koła policzyć objętość kuli jako całkę potrójną zaleną od promienia r, kąta alpha na płaszczyżnie XY i kąta theta dla określenia odchylenia promienia w przestrzeni względem płaszczyzny XY. Wzór na objętość kuli w tym wypadku będzie przedstawiony jako:

$$P_l=\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Pom}\; d\alpha\, d\theta\; \mathrm{dr}$$

Podpowiedź: do promienia (zmienna Prom) wyznaczonego na płaszczyźnie należy dodać składową określającą zmienę względem osi z zależną od r i kąta θ.

Równania różniczkowe

Wprowadźmy zapis równania różniczkowego w wyrażeniu symbolicznym. Potrzebne jest do tego zdefiniowanie funkcji symbolicznej np. y(x). Definiuje się ja podobnie jak zmienną poprzez funkcję ***syms***

```
clear variables
syms y(x)
```

Teraz mozna zdefiniować rówananie rózniczkowe zmiennej x w postaci

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-2*x+4*y(x)$$

i zapisać to jako zmienną r_rx

```
r_rx=diff(y,x)==-2*x^2-4*y
```

r_rx(x) =

$$\frac{\partial}{\partial x}\, y(x) = -4\, y(x) - 2\, x^2$$

Do roziązywania równania rózniczkowego wykorzystuje się funkcję ***dsolve***

```
y_roz=dsolve(r_rx)
```

y_roz =

$$\frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} + C_1\, \mathrm{e}^{-4\,x} - \frac{1}{16}$$

Oczywiście takie rozwiązanie spowoduje pojawienie się stałych całkowania, które można wyznaczyć wprwadzając warunki początkowe. Np podając wartość początkową y(x) dla x=-2, np y(0)=-2

```
w_p=y(0)==-2
```

w_p = $y(0) = -2$

Po wprowadzeniu warunków początkowych rozwiąznie równania sprowadza sie do wywałoania funkcji ***dsolve*** z parametrami dsolve(r_rx,w_p), czyli

```
y_roz_p=dsolve(r_rx,w_p)
```

y_roz_p =

$$\frac{x}{4} - \frac{31\, \mathrm{e}^{-4\,x}}{16} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}$$

Teraz możemy przedstawić rozwiązanie, czyli przebieg fynkcji y(x) np dla x od 0 do 1.5

```
fplot(y_roz_p,[0 1.5],'b')
```

Sprwdżmy jak będzie wyglądała funkcją będąca różniczką funkcji y w tym przedziale i narysujmy ją na wykresie

```
dydx=diff(y_roz_p,x)
```

dydx =

$$\frac{31\, \mathrm{e}^{-4\,x}}{4} - x + \frac{1}{4}$$

```
hold on
fplot(dydx,[0,1.5],'r--')
grid on
```

Poszukajmy extremum funkcji y dla prezentowanego przedziału, czyli znajdźmy warość x dla której pochodzna równa się 0 czyli $\frac{dy}{dx} = 0$. W tym celu, założymy że x jest w interesującym nas przedziale 0<x<1.5.

```
assume(x>0)
assumeAlso(x<1.5)
x0=double(solve(dydx==0,x))
```

```
x0 = 0.7074
```

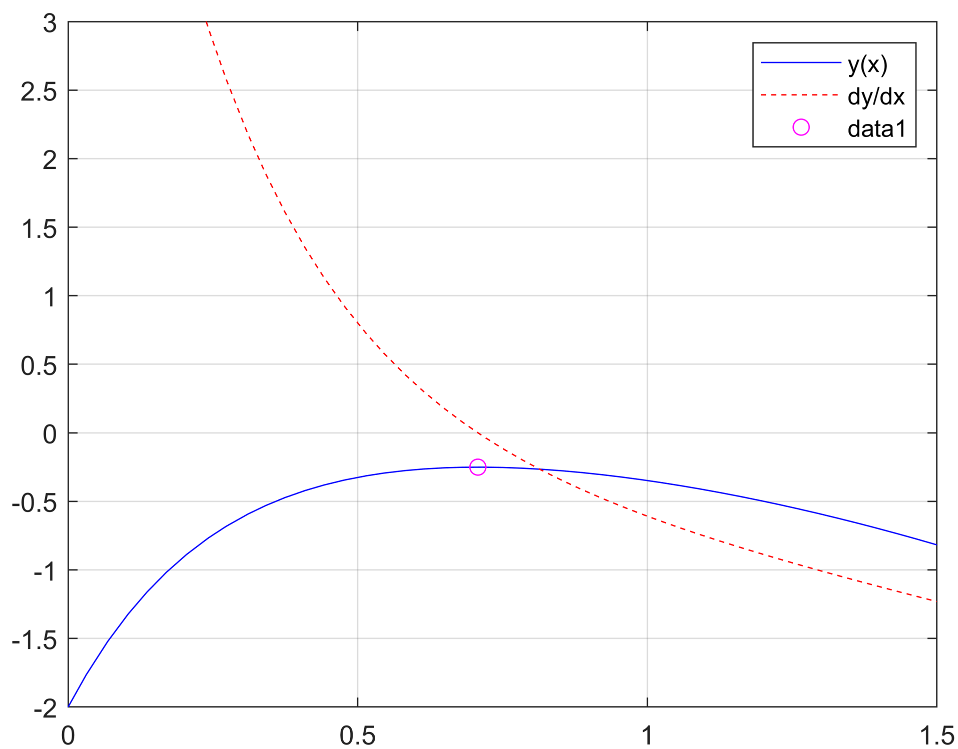
```
legend(['y(x) ';'dy/dx';'ymax '])
```

Wyznaczmy wartość y od x0 i przedstawny go na wykresie

```
y0=double(subs(y_roz_p,x,x0))
```

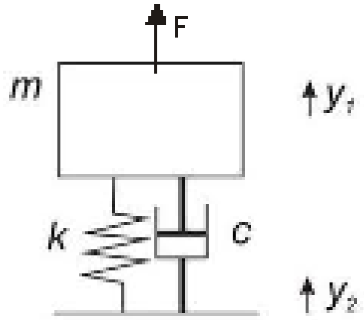
```
y0 = -0.2502
```

```
plot(x0,y0,'mo')
axis([0 1.5 -2 3])
hold off
```



Przykłady zastosowania równań różniczkowych do układów mechanicznych

Przykład rozwiązania dla masy połączonej z podłożem za pomocą tłumika i sprężyny.



Mamy układ przedstawiony jak na rysunku. Masa m jest połączona z podłożem za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k (N/m) i tłumika drgań o współczynniku tłumienia c (N s/m). Określmy przemieszceznia masy m względem osi y, gdy zadziała na niego siła F skierowana zgodnie z osią y

Układ opisuje równanie:

$$m\frac{d^2y}{\mathrm{dt}^2}+c\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}+\mathrm{ky}=F(t)$$

W stanie równowagi, gdy na układ nie działa żadna siła równie to ma postać:

$$m\frac{d^2y}{\mathrm{dt}^2}+c\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}+\mathrm{ky}=0$$

Wprowadźmy zatem zmienne symboliczne odpowidajace parametrom równania

```
syms y(t) m c k F(t)
```

Wprowadźmy ograniczenia na zmienne, zakładajace, że charakterystyki elementów, masa oraz przemieszczenie ma wartości dodatnie oraz że siła jest wielkością należacą do zbioru liczb rzeczywistych.

```
assume([k c m],'positive')
assume(y(t),'real')
```

Zacznijmy od rozwiązania zadania gdy siła F=0. Wprowadźmy rónanie sił działających na układ.

```
RM=m*diff(y,t,2)+c*diff(y,t)+k*y==0
```

RM(t) =

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t)+c\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)+k\,y(t)=0$$

Do rozwiązania zadania należy podać warunki początkowe, dotyczące punktu startu, poczatkowej prędkości czy przyśpieszenia. Załużmy, że w początkowym stanie położenie jest odchylone od stanu równowagi o -8cm y(0)=-0.08 oraz, że prędkość początkowa masy była równa 0, yp - jest zmiennną określającą początkowe położenie, vp - określa początkową prędkość, aby ją podać, najpierw należy wyznaczyć funkcję reprezentującą pochodną po y(t), stąd definicja warunków początkowych jest następująca.

```
yp=y(0)==-0.08;
Dy(t)=diff(y(t),t)
```

Dy(t) =

$$\frac{\partial}{\partial t}\, y(t)$$

```
vp=Dy(0)==0;
```

Rozwiążmy to zadanie

```
Y_m = dsolve(RM,[yp vp])
```

Y_m =

$$\frac{e^{-\frac{t\,(c+\sigma_1)}{2\,m}}\,(c-\sigma_1)}{25\,\sigma_1}-\frac{e^{-\frac{t\,(c-\sigma_1)}{2\,m}}\,(c+\sigma_1)}{25\,\sigma_1}$$

where

$$\sigma_1=\sqrt{c^2-4\,k\,m}$$

Podstawmy wartości za zmienne. Załużmy, że masa m=70 kg, współczynnik sprężystości k=30 N/m, a współczynnik tłumienia c=15 Ns/m. Podstawmy wartości i narysujmy wykres zmian położenia masy od czasu t w przedziale od 0 do 150 s.

```
Y_m_val(t)=subs(Y_m,[m,c,k],[70,15,30])
```

Y_m_val(t) =

$$\frac{\sqrt{8175}\,e^{\frac{t\,(-15+\sqrt{8175}\,i)}{140}}\,(15+\sqrt{8175}\,i)\,i}{204375}+\frac{\sqrt{8175}\,e^{-\frac{t\,(15+\sqrt{8175}\,i)}{140}}\,(-15+\sqrt{8175}\,i)\,i}{204375}$$

```
ts=[0:0.5:100];
Y_val=double(Y_m_val(ts));
plot(ts,Y_val)
% fplot(Y_m_val,[0 100]),
```

Dołużmy wykres zmian prędkości. W tym celu zróżniczkujmy otrzymane wyrażenie na drogę Y_m_val(t). Następnie policzymy wartości prędkości dla zadanych wartości czas ts

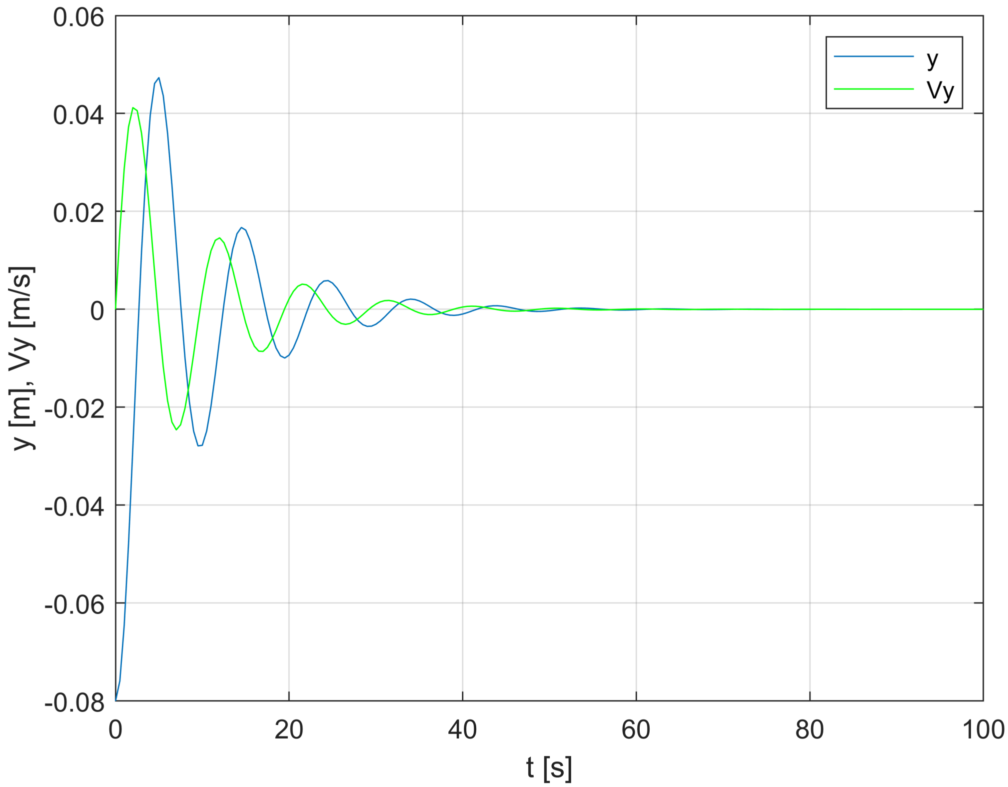
```
V_y=diff(Y_m_val,t)
```

V_y(t) =

$$\frac{\sqrt{8175}\,e^{\frac{t\,(-15+\sqrt{8175}\,i)}{140}}\,(15+\sqrt{8175}\,i)\left(-\frac{3}{28}+\frac{\sqrt{8175}\,i}{140}\right)i}{204375}-\frac{\sqrt{8175}\,e^{-\frac{t\,(15+\sqrt{8175}\,i)}{140}}\,(-15+\sqrt{8175}\,i)\,\Big(}{204375}$$

```
V_val=double(V_y(ts));
hold on
plot(ts,V_val,'g')
xlabel('t [s]')
ylabel('y [m], Vy [m/s]')
```

```
%fplot(V_y,[0 100],'g')
legend([' y ';' Vy'])
grid on
hold off
```



Ćwiczenia z zakresu analizy układu kinematycznego masy drgającej

Sprawdzić jak zachowa się układ, gdy wymuszenie, czyli początkowe wychylenie masy od punktu równowagi będzie -4 cm. Wynik przedstawić graficznie.

Podpowiedź: należy wykonać taką samą analizę jak poprzednio zmieniajjąc warunki początkowe.

Wskazać jak zmieni się charakreystyka drgań masy gdy zmienimy współczynnik tłumienia. Zrobić ćwiczenie wstawiając trzy wartości współczynnika tłumienia np c=[10 15 20] Ns/m. Przedstawić wynik na wykresie.

Zwiększyć współczynnik tłumienia do c=50 Ns/m